Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

2023/2024. tanév

I. forduló

Megoldások

2023. december 11.

*Minden versenyzőnek a számára (az alábbi táblázatban) kijelölt **négy** feladatot kell megoldania. Azoknak a tanulóknak, akik nem gimnáziumi rendszerben tanulnak fizikát, az **A** feladatsort kell megoldani.*

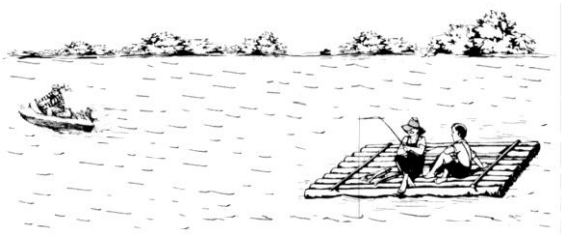
A rendelkezésre álló idő 180 perc. A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és számológép használható. Minden feladatot külön lapon oldjon meg! A feladatok különböző pontértékűek és az egyes kategóriákban elérhető maximális pontszámok is eltérőek.

A gimnazisták feladatai		*A szakközépiskolások feladatai*	
***9.** osztály*	***2., 4., 6., 12.** (50 pont)*	***A.***	***1., 6., 10., 12.** (55 pont)*
***10.** osztály*	***5., 7., 11., 13.** (55 pont)*		
***11.** osztály*	***3., 8., 15., 16.** (90 pont)*		
***12.** osztály*	***9., 10., 14., 15.** (80 pont)*		

FIGYELEM!!!
*Azokban a feladatokban, ahol erre az adatra szükség van, vegye a földfelszíni gravitációs gyorsulás értékét **10 m/s^2**-nek (hacsak a feladat nem ad meg más értéket)!*

Jó munkát kívánunk!

1. Egy motorcsónak a folyón felfelé (folyásiránnyal szemben) haladva egy lefelé (folyásirányba) úszó tutajjal találkozik. Ezután egy órával motorja meghibásodik, ezután a csónak is a folyásirányba sodródik. A lefelé sodródó csónakon 30 perc alatt sikerül a motort megjavítani, ezt követően pedig a vízhez képest ugyanakkora sebességgel, mint amivel fölfelé haladt, lefelé indul. Így utoléri a tutajt 7,5 km-re attól a ponttól, ahol először találkoztak. Mekkora a víz folyási sebessége? **(10 pont)**



Megoldás:

Vizsgáljuk meg a mozgást a vízzel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben! Ebben a tutaj nyugalomban van *(2 pont)*, a motorcsónak pedig a találkozás után egy órán keresztül távolodik tőle *(1 pont)*.

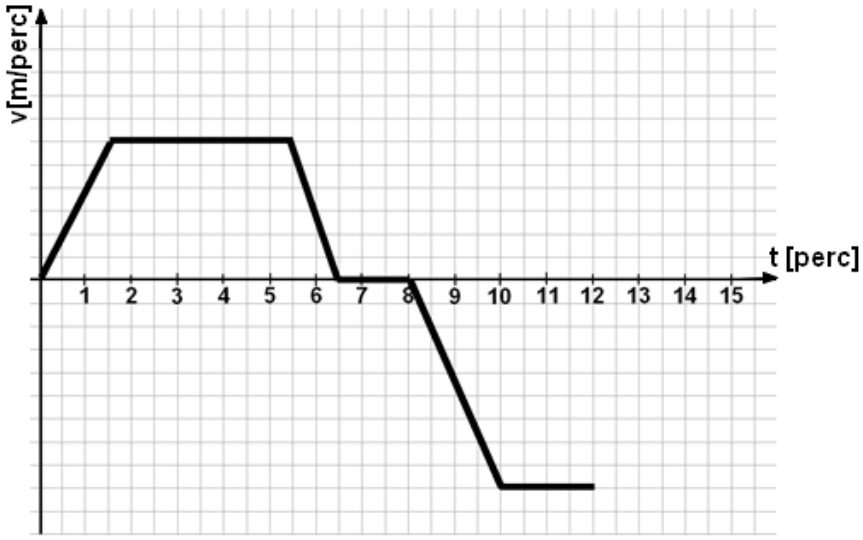
Ameddig a motor áll (30 percig), addig a motorcsónak és a tutaj távolsága nem változik *(2 pont)*.

A javítás végeztével a motorcsónak ugyanazzal a sebességgel, amivel korábban távolodott, közeledik a tutajhoz *(1 pont)*.

Így könnyen megérthető, hogy az utoléréshez megint egy órára van szükség *(2 pont)*. A teljes folyamat ideje tehát $1\ \text{óra} + 30\ \text{perc} + 1\ \text{óra} = 2{,}5\ \text{óra}$ *(1 pont)*.

Ennyi idő alatt a tutaj (és vele együtt a folyóvíz) 7,5 km-t tesz meg. A folyó sebessége ezért $7{,}5\ \text{km}/2{,}5\ \text{h} = \underline{3\ \text{km/h}}$ *(1 pont)*.

2. Lisszabon híres 28-as vonalán egyetlen villamoskocsi jár 3150 m távolságban levő alsó (tengerpart) és felső (hegytető) állomás között oda-vissza (közbenső megállóhely nélkül), az alsó megállóból 15 percenként indulva. Az ábrán a villamos egy oda-vissza útjának sebesség-idő grafikonja látható, de nem a teljes oda-vissza úté (a vége hiányzik). Az idő tengelyen perc mértékegységet használunk és a skálaléptéket is feltüntettük, a sebességtengelyen méter/perc mértékegységet használunk, de nem áruljuk el a léptéket.



(a) Mekkora (hány méter/perc) az osztás a sebesség tengelyen? **(5 pont)**
A grafikonon csak az indulástól mért első 12 percen jelenítettük meg a villamos sebességét. A 12. perctől a villamos egyenletesen lassít, majd megállás után a 15. perc végéig az alsó állomáson áll (miután újra nekiindul ugyanezen grafikon szerint).
(b) Egészítse ki a grafikont a 15. perc végéig! **(5 pont)**

Megoldás:
(a) A felfelé mozgás során az egyenletes utazósebességet jelölje v_{fel}. A grafikonról láthatóan a felfelé út időtartama 6,5 perc, amiből 1,5 perc a gyorsítási szakasz, 4 perc az egyenletes mozgás időtartama és 1 perc a fékezés időtartama *(1 pont)*. A 6,5 perc alatt 3150 m utat tesz meg a villamos, amit a grafikon alatti terület ad meg:

$$\frac{1}{2}v_{fel}\cdot 1{,}5\text{ perc}+v_{fel}\cdot 4\text{ perc}+\frac{1}{2}v_{fel}\cdot 1\text{ perc}=v_{fel}\cdot 5{,}25\text{ perc}=3150\text{ m}.$$

Így kapjuk, hogy:

$$v_{fel}=600\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}=10\,\frac{\text{m}}{s}.$$ *(3 pont)*

Mivel láthatóan 6 osztás (kis négyzet) adja a v_{fel}. sebességet, tehát <u>egy osztás (kis négyzet) 100 m/perc értéket jelent a sebesség-tengelyen</u>. *(1 pont)*

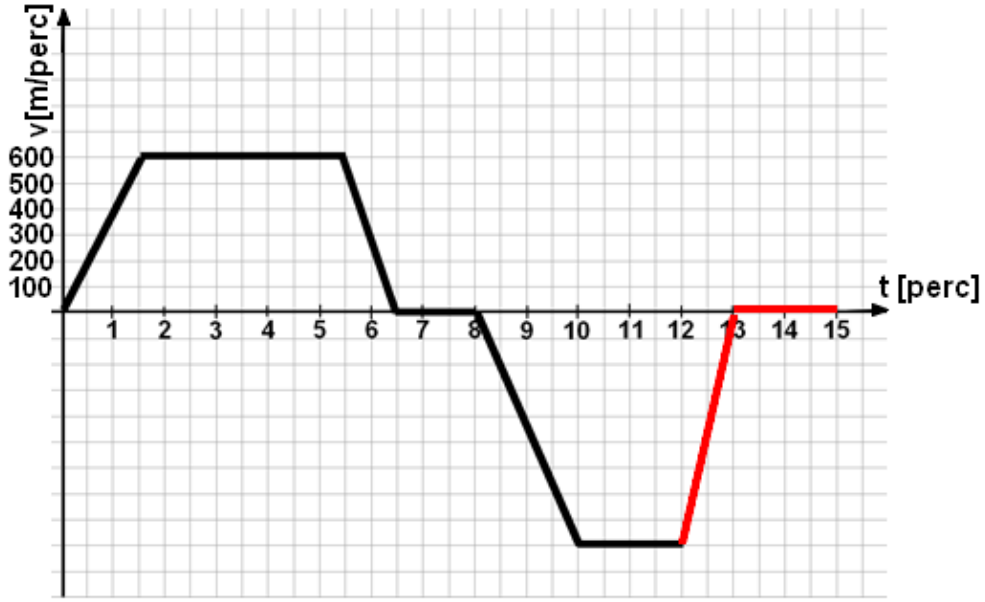
(b) Előző eredményünk alapján a grafikonról leolvashatjuk a lefelé mozgás során az egyenletes utazósebesség értékét: 9 osztásnyi a sebesség-tengelyen, tehát

$$v_{le}=900\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}=15\,\frac{\text{m}}{s}.$$ *(1 pont)*

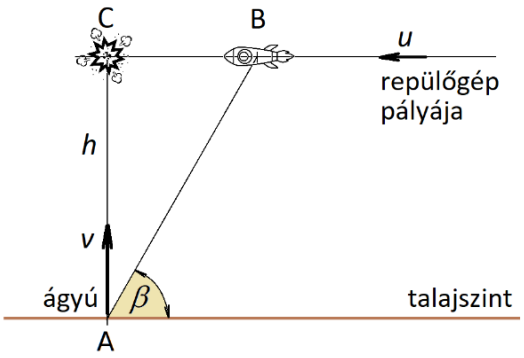
A lefelé mozgás során (a grafikonról láthatóan) a villamos 2 percig gyorsít, majd 2 percig (a 12. perc végéig) v_{le} sebességgel halad. Ezen 4 perc alatt megtett út:

$$\frac{1}{2}900\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}\cdot 2\text{ perc}+900\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}\cdot 2\text{ perc}=2700\text{ m}.$$ *(2 pont)*

A fékezési szakasz tehát 3150 m – 2700 m = 450 m, mely lassulási szakaszon a villamos átlagsebessége $\frac{v_{le}}{2}=450\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}$, így lassítási időtartam 1 perc, vagyis a 13. perc végéig tart, a maradék 2 percben a villamos az alsó állomáson áll (mielőtt újabb útra indul felefelé). Ezek értelmében már kiegészíthetjük a grafikont. *(2 pont)*



3. Egy repülőgép h = 3000 m magasan halad egy légvédelmi ágyú felé u = 100 m/s sebességgel. A repülőgépet meg akarják semmisíteni az ágyúval, ezért annak csövét függőlegesen fölfelé irányították. Az ágyúcsőből kilépő lövedék torkolati sebessége v = 1000 m/s. A lövedékre ható légellenállást hanyagoljuk el, g = 10 m/s^2. (Az ábra nem méretarányos.)



(a) A vízszintes sík felett mekkora β szög alatt kell látszania a repülőgépnek ahhoz, hogy ekkor elsütve az ágyút, a lövedék eltalálja a célpontot? **(15 pont)**
(b) Magyarázza el a lövedék lehetséges röppályáit. Milyen irányból találja el a lövedék a célpontot? **(5 pont)**

Megoldás:
(a) A feltételezés szerint a kilőtt lövedék pályája függőleges egyenes. A találat feltétele, hogy a lövedék és a célpont ugyanabban a pillanatban tartózkodjon az ágyú fölötti C pontban. A lövés leadásának pillanatában legyen t = 0. Az ábra jelöléseivel a repülőgép által megtett BC út és ebből a repülési idő *(3 pont)*:

$$ut = \frac{h}{\mathrm{tg}\beta}, \qquad t = \frac{h}{u\,\mathrm{tg}\beta}.$$

A lövedék útja és ebből a lövedék repülési ideje *(3 pont)*:

$$h = vt - \frac{g}{2}t^2, \qquad t^2 - \frac{2v}{g}t + \frac{2h}{g} = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{g} \pm \sqrt{\frac{4v^2}{g^2} - \frac{8h}{g}}\right).$$

A repülési idők egyenlők (mert csak ekkor találja el a lövedék a repülőgépet) *(3 pont)*:

$$\frac{h}{u\,\mathrm{tg}\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{g} \pm \sqrt{\frac{4v^2}{g^2} - \frac{8h}{g}}\right).$$

Ebből a β szög tangense *(3 pont)*:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2h}{u\left(\frac{2v}{g} \pm \sqrt{\frac{4v^2}{g^2} - \frac{8h}{g}}\right)}, \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{2h}{u\left(\frac{2v}{g} \pm D\right)},$$

ahol:

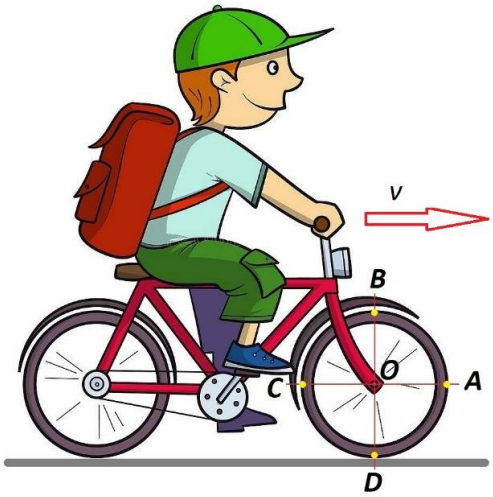
$$D = \sqrt{\frac{4v^2}{g^2} - \frac{8h}{g}} = \sqrt{\frac{4\times(1000\,\mathrm{m/s})^2}{(10\,\mathrm{m/s^2})^2} - \frac{8\times 3000\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} \approx 193{,}91\,\mathrm{s}.$$

A szögek *(3 pont)*: $\mathrm{tg}\beta_{1,2} = \dfrac{2\times 3000\,\mathrm{m}}{100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(\frac{2\times 1000\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} \pm 193{,}91\,\mathrm{s}\right)}$,

$$\mathrm{tg}\beta_1 \approx 0{,}1523, \qquad \beta_1 \approx 8{,}661°; \qquad \tan\beta_2 \approx 9{,}8477, \qquad \beta_2 \approx 84{,}20°.$$

(b) A kisebb megfigyelési szögnél leadott lövéskor a lövedék fölfelé halad, és alulról találja el a célpontot. *(2 pont)*
A nagyobb megfigyelési szögnél a lövedék először fölmegy a maximális pályamagasságra, majd onnan szabadon esve találná el a célpontot. A légellenállás miatt ez a röppálya nem alkalmas repülőgépek megsemmisítésére. *(3 pont)*

4. Egy kerékpáros v = 18 km/h sebességgel halad a vízszintes úttesten. A kerekek csúszásmentesen gördülnek. Az első gumiabroncs külső felületén bejelöltük az ***A, B, C*** és ***D*** pontot, illetve a kerék ***O*** forgástengelyét (lásd az ábrát).



(a) Mekkora a keréken bejelölt négy pont úttesthez viszonyított sebességének nagysága, és milyen az iránya? **(10 pont)**
(b) Az eredményt (a sebességvektorokat) rajzon is mutassa be. **(5 pont)**

Megoldás:
(a) A kerékpár sebessége (2 pont):

$$v = \frac{18}{3,6}\,\text{m/s} = 5\,\text{m/s}\,.$$

Mivel a gördülés csúszásmentes, a gumiabroncs kerületi sebessége is ennyi.

Az A pont haladási sebessége v. A forgásból eredően van egy függőlegesen lefelé mutató sebessége, ennek nagysága is v. A két sebesség eredőjének nagysága Pitagorasz tételével (2 pont):

$$v_A = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}\cdot v = \sqrt{2}\cdot 5\,\text{m/s} \approx 7,07\,\text{m/s} \approx 25,46\,\text{km/h}\,.$$

Iránya ferdén lefelé mutat, –45°-ot zár be a vízszintes haladási iránnyal.

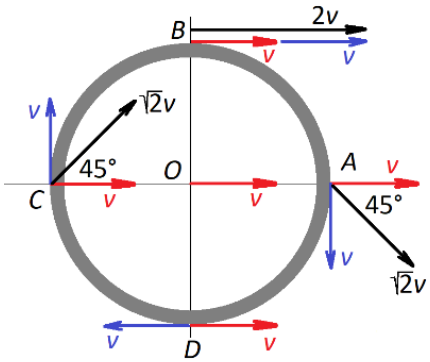
A B pont haladó és forgó mozgásból eredő sebességének nagysága és iránya megegyezik, ezek eredője (2 pont):

$$v_B = 2v = 2\cdot 5\,\text{m/s} \approx 10\,\text{m/s} = 36\,\text{km/h}\,, \qquad \text{iránya vízszintes.}$$

A C pont haladási sebessége v. A forgásból eredően van egy függőlegesen fölfelé mutató sebessége, ennek nagysága is v. A két sebesség eredőjének nagysága Pitagorasz tételével (2 pont):

$$v_C = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}\cdot v = \sqrt{2}\cdot 5\,\text{m/s} \approx 7,07\,\text{m/s} \approx 25,46\,\text{km/h}\,.$$

Iránya ferdén fölfelé mutat, 45°-ot zár be a vízszintessel.



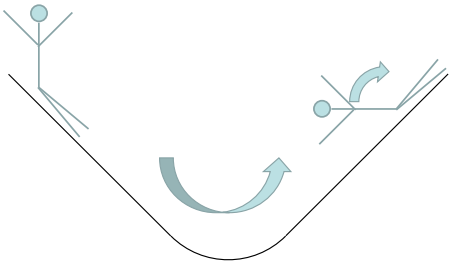
A D pont haladási sebessége v, a forgómozgásból eredő sebessége $-v$, ezek eredője (2 pont):

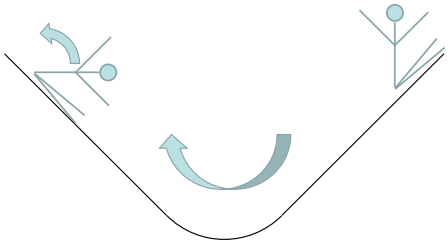
$$v_D = v - v = 0\,.$$

A D pont az úttesten van csúszásmentesen, ebből is következik, hogy sebessége zérus.

(b) Rajz (5 pont)

5. A Matematikai és Fizikai Vidámparkban a játszótéren különleges játékok, közöttük a megszokottól eltérő „hinták” találhatók. Ezeknek nem láncon vagy kötélen lóg az ülése, hanem egy súrlódásmentes, két lejtőből és egy körívből felépített pályán mozoghat. A két lejtő hajlásszöge 45°, egyik oldalt lejtő, a másikon emelkedő irányú, és a két lejtőt törésmentesen köti össze a körív alakú rész.





Egy óvodást, aki már tudja hajtani magát a hintákon, a lejtős részen indítanak el, és oly módon „hintázik” rajta, hogy a lejtős részen függőleges felsőtesttel indul, és mereven tartja magát mozgásának emelkedő oldali tetőpontjáig, így értelemszerűen vízszintes felsőtesttel érkezik oda. Az emelkedő oldali tetőponton derekának egy gyors mozdulatával újra függőlegesbe fordítja a felsőtestét (ezt olyan rövid idő alatt teszi, hogy eközben az üléssel együtt való elmozdulása elhanyagolható), így, magát mereven tartva indul visszafelé, és a lejtős oldali tetőpontra megint csak vízszintes felsőtesttel érkezik. A hintázás leírt ciklusából már csak az az utolsó mozzanat hiányzik, hogy felsőtestét ekkor is pillanatszerűen függőlegesbe fordítja.

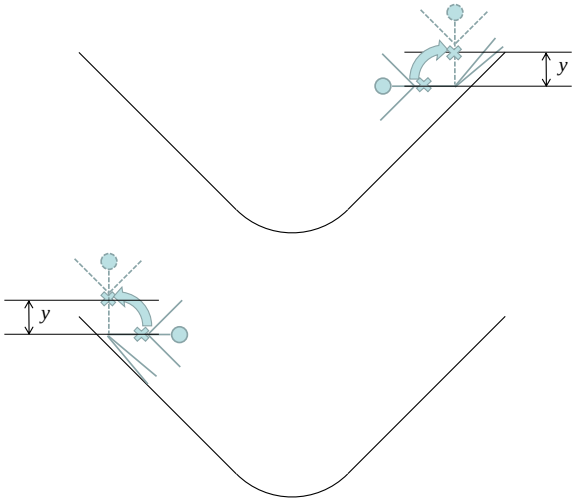
Az óvodás testtömege 23 kg, melyből felsőteste 15 kg tömegű, a felsőtest tömegközéppontja a derekától 15 cm távolságban van. Az ülés 4 kg tömegű.

Hány hintázási ciklus alatt emelkedik a mozgás tetőpontja 1 métert? **(10 pont)**

<u>Megoldás:</u>

Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: az óvodás testtömege $m = 23$ kg, melyből felsőteste $m_f = 15$ kg tömegű, a felsőtest tömegközéppontja a derekától $y = 15$ cm távolságban van.

Az ülés $M = 4$ kg tömegű. Hány hintázási ciklus alatt emelkedik a mozgás tetőpontja $h = 1$ m-t?



A mozgás szintemelkedése a hintázó munkavégzésének köszönhető, melyet a szélső pontokon megtett derékmozdulataival végez *(3 pont)*.

Ennek során felsőtestének tömegközéppontját y-nal emeli meg *(3 pont)*, ami egy teljes hintázási periódus alatt:

$\Delta E_{h1} = 2 \cdot m_f g y = 2 \cdot 15\ \text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}15\ \text{m} = 45\ \text{J} = W_1$ helyzetienergia-növekedés *(1 pont)*, ami természetesen ugyanennyi munkavégzésből származik.

A hintázó h-val történő szintemelkedéséhez a hintázás két ugyanolyan szélső pontja között $\Delta E_h = (m + M)gh = (23\ \text{kg} + 4\ \text{kg}) \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}1\ \text{m} = 270\ \text{J}$ helyzetienergia-növekedés szükséges *(1 pont)*.

A két mennyiséget elosztva kapjuk *(1 pont)*, hogy $n = \frac{\Delta E_h}{W_1} = \frac{270\ \text{J}}{45\ \text{J}} = \underline{\underline{6}}$ a szükséges hintázási periódusok száma *(1 pont)*.

6. A fúvócső bambuszból vagy üreges faágból készült lőfegyver. A vadász a lövedéket (pl. agyaggolyót) behelyezi a cső alsó végébe, mély lélegzetvétel után szájába veszi a cső alsó végét (lásd az ábrát), céloz, majd hirtelen nagy erővel összeszorítja a rekeszizmait, és levegőt présel a csőbe.

A fúvócső hossza L = 1,5 m, belső átmérője D = 2 cm, a lövedék tömege m = 5 gramm.
A lövedék és a csőfal közötti tapadási erő olyan nagy, hogy a lövedék csak p = 1,1 bar nyomásnál indul el. Miközben a lövedék a fúvócsőben mozog, a vadász tüdejében és a csőben a nyomás állandó.
A külső légnyomás p_0 = 1 bar.
A lövedék és a csőfal közötti súrlódási erőt és a tömítetlenségi veszteséget hanyagoljuk el (a lövedék légmentesen zár).

(a) Mekkora a lövedékre ható tapadási erő? **(5 pont)**

(b) Mekkora a lövedék gyorsulása? **(5 pont)**
(c) Mekkora sebességgel lép ki a lövedék a csőből (mekkora a torkolati lövedéksebesség), és mennyi ideig mozog a lövedék a csőben? **(5 pont)**

Megoldás:
(a) A cső keresztmetszete (2 pont):

$$A = \frac{D^2\pi}{4} = \frac{(2\,\text{cm})^2 \cdot \pi}{4} \approx 3{,}1416\,\text{cm}^2 .$$

A lövedékre ható tapadási erő egyenlő a belső és külső nyomás különbsége által kifejtett erővel: (3 pont):

$$F_{\text{tap}} = (p_1 - p_0)A , \qquad F_{\text{tap}} = (1{,}1-1)\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 3{,}1416\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \approx 3{,}1416\,\text{N} .$$

(b) A mozgó lövedékre ható súrlódási erőt elhanyagolhatjuk. Így a lövedék mozgásegyenlete és gyorsulása: (5 pont):

$$(p_1 - p_0)A = ma , \qquad a = (p_1 - p_0)\frac{A}{m} , \qquad a = 0{,}1\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot\frac{3{,}1416\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{5\cdot 10^{-3}\,\text{kg}} \approx 628\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

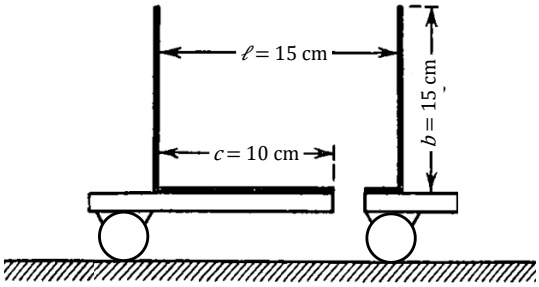
(c) Mivel a feltételek alapján a lövedék gyorsulása állandó, a torkolati sebesség (3 pont):

$$v_{\max} = \sqrt{2La} = \sqrt{2\cdot 1{,}5\,\text{m}\cdot 628\,\text{m/s}^2} \approx 43{,}4\,\text{m/s} .$$

A lövedék felgyorsulásának ideje a csőben (2 pont):

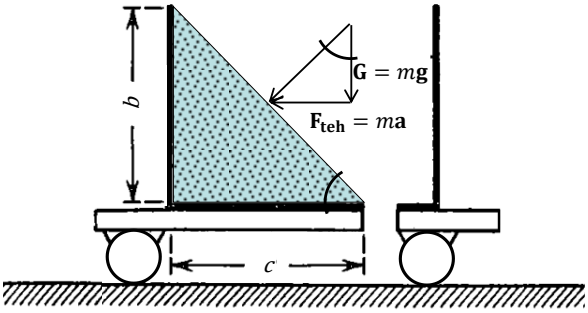
$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5}{628}} = 0{,}0691\,\text{s} \approx 70\,\text{ms} .$$

7. Egy kiskocsira az ábra szerinti méretű, felül nyitott edényt helyeztek, melynek alján lyuk található. Milyen gyorsulással kell mozgatnunk a rendszert ahhoz, hogy az edényben a lehető legtöbb víz maradjon meg? **(10 pont)**

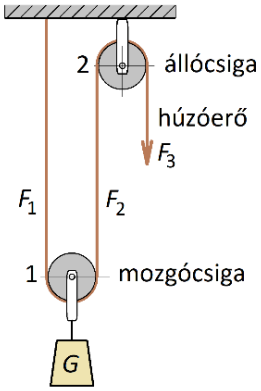


Megoldás:

A gyorsulásnak a jobb (a lyuk felőli) oldal irányába kell történnie *(2 pont)*, ilyen módon érhető el ugyanis az, hogy a víz felülete tartósan az edény bal felső széle és a lyuk bal széle között húzódjon *(3 pont)*. A folyadékfelszín merőleges a nehézségi és a gyorsuláshoz társítható tehetetlenségi erő (az ábrán $\mathbf{F}_{\text{teh}}$) eredőjére *(2 pont)*, ezért az ábrán látható két derékszögű háromszög hasonló *(1 pont)*, melynek következtében igaz a következő aránypár: $\frac{a}{g} = \frac{b}{c}$ *(1 pont)*, amiből $a = g\frac{b}{c} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\frac{15\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = \underline{\underline{15\ \text{m/s}^2}}$ *(1 pont)*.



8. Egy mozgó- és egy állócsigából összeállított emelővel terhet emelünk az ábra szerint. A teher súlya G = 1000 N, emelési sebessége állandó. A csigák és a kötél tömegét hanyagoljuk el. A csigák méretei megegyeznek.



(a) Mekkora az F_3 húzóerő, ha feltételezzük, hogy a csigák és a tengelyük közötti súrlódás zérus? **(5 pont)**

A valóságban a csigák és a tengelyük között súrlódási nyomaték ébred, ez akadályozza a csigák forgását. Ezek a súrlódási nyomatékok arányosak a tengelyeket terhelő kötélerők összegével: $\frac{M_{2.\text{súrl}}}{M_{1.\text{súrl}}} = \frac{F_2 + F_3}{F_1 + F_2}$. (Az F_1, F_2, F_3 a kötélerőket bejelöltük az ábrán.)

A mérések szerint a G = 1000 N súlyú teher emeléshez szükséges húzóerő: F_3 = 600 N.

(b) Mekkora az F_2 és F_1 kötélerő? **(10 pont)**

(c) Mekkora a teheremelés hatásfoka (a teher helyzeti energiájának növekedése osztva a húzóerő munkájával)? **(5 pont)**

(d) Mekkora a mozgó- és az állócsiga hatásfoka? **(10 pont)**

Megoldás:

(a) Ha a súrlódás zérus, a kötélerők nagysága a kötél mentén állandó: $F_1 = F_2 = F_3 = F$. A súlyerő egyenlő az F_1 és F_2 kötélerő összegével, innen a húzóerő (5 pont):

$$F_1 + F_2 = 2F = G, \qquad F_3 = F = G/2 = 500\ \text{N}.$$

(b) Súrlódás esetén a csigák forgatásához szükséges nyomatékok aránya megegyezik a csigákat terhelő kötélerők összegeinek arányával (5 pont):

$$\frac{M_{2.\text{súrl}}}{M_{1.\text{súrl}}}=\frac{(F_3-F_2)r}{(F_2-F_1)r}, \qquad \frac{F_3-F_2}{F_2-F_1}=\frac{F_2+F_3}{F_1+F_2}.$$

Innen az F_2 kötélerő:

$$F_2=\sqrt{F_1F_3}\,.$$

(A kötélerők mértani sorozatot alkotnak, ahol az erőhányados: $q=F_2/F_1=F_3/F_2$, $F_3=F_1q^2$.)

Vegyük figyelembe, hogy: $F_1+F_2=G$, azaz $F_1=G-F_2$. Helyettesítsük ezt be az F_2-re kapott egyenletbe:

$$F_2^2=F_1F_3=(G-F_2)F_3=GF_3-F_2F_3\,.$$

F_2-re egy másodfokú egyenletet kapunk, ennek gyöke (3 pont):

$$F_2^2+F_2F_3-GF_3=0\,, \qquad F_2=\frac{1}{2}\left(-F_3\pm\sqrt{F_3^2+4GF_3}\right).$$

Behelyettesítve, megkapjuk a keresett kötélerőket (2 pont):

$$F_2=\frac{1}{2}\left(-600\pm\sqrt{600^2+4\cdot1000\cdot600}\right)\approx530{,}7\,\text{N}\,,$$

$$F_1=G-F_2=1000\,\text{N}-530{,}7\,\text{N}=469{,}3\,\text{N}\,.$$

(c) A húzóerő munkája, miközben a mozgócsiga h magassággal megemeli a terhet: $W_{2.\text{be}}=2hF_3$. A teheremelés hatásfoka (5 pont):

$$\eta_{\text{eredő}}=\frac{Gh}{W_{2.\text{be}}}=\frac{Gh}{2hF_3}=\frac{G}{2F_3}=\frac{1000}{2\cdot600}=\frac{5}{6}\approx83{,}33\%\,.$$

(d) Tegyük föl, hogy a terhet h magassággal megemeltük. Ekkor a mozgócsiga sugara, szögelfordulása és a teheremelkedés magassága közötti kapcsolat: $r\varphi=h$. A mozgócsigába befektetett munka az F_2 kötélerőnek és a meghúzás útjának szorzata: $W_{1.\text{be}}=2hF_2$.

A mozgócsigán ébredő súrlódási nyomaték, a súrlódási veszteség és a mozgócsiga hatásfoka (5 pont):

$$M_{1.\text{súrl}}=(F_2-F_1)r\,, \qquad W_{1.\text{súrl}}=M_1\varphi=(F_2-F_1)r\varphi\,,$$

$$\eta_1=\frac{W_{1.\text{be}}-W_{1.\text{súrl}}}{W_{1.\text{be}}}=1-\frac{(F_2-F_1)r\varphi}{2hF_2}=1-\frac{F_2-F_1}{2F_2}=\frac{F_1+F_2}{2F_2}\,,$$

$$\eta_1=\frac{469{,}3+530{,}7}{2\cdot530{,}7}\approx94{,}22\%\,.$$

A teher h emelkedése közben az állócsiga szögelfordulása 2φ. Az állócsigán ébredő súrlódási nyomaték, a súrlódási veszteség és az állócsiga hatásfoka (5 pont):

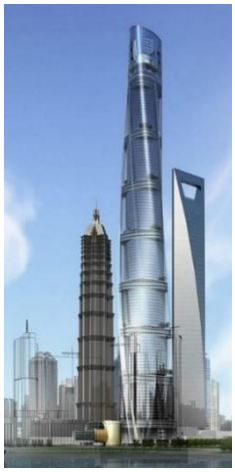
$$M_{2.\text{súrl}}=(F_3-F_2)r\,, \qquad W_{2.\text{súrl}}=M_2\cdot2\varphi=(F_3-F_2)r\cdot2\varphi,$$

$$\eta_2=\frac{W_{2.\text{be}}-W_{2.\text{súrl}}}{W_{2.\text{be}}}=\frac{F_3\cdot2h-(F_3-F_2)r\cdot2\varphi}{F_3\cdot2h}=1-\frac{F_3-F_2}{F_3}=\frac{F_2}{F_3}\,.$$

$$\eta_2=\frac{F_2}{F_3}=\frac{530{,}7}{600}\approx88{,}44\%\,.$$

Az állócsiga hatásfoka kisebb, mint a mozgóé, mert nagyobb a terhelése. A két hatásfok szorzata megadja az eredő hatásfokot:

$$\eta_1\eta_2 = 94,22\% \cdot 88,4\% = 83,33\%.$$



9. A Sanghaj-torony (Kína) gyorsliftje közbülső megállás nélkül t = 53 s alatt juttatja föl a látogatókat a földszintről a H = 578,5 m magasan levő kilátó szintre. A lift az emelkedési út első felében egyenletesen gyorsul, a másodikban egyenletesen lassul. A gyorsulás és a lassulás nagysága azonos. A felfelé és a lefelé vezető út menetideje, gyorsulása és lassulása megegyezik.

(a) Mekkora a lift gyorsulása? **(5 pont)**
(b) Mekkora a lift legnagyobb sebessége? **(5 pont)**
(c) A liftben van egy kisméretű precíz ingaóra, ez az álló liftben pontosan jár. A lift naponta n = 100 alkalommal teszi meg a teljes fel/le utat. Naponta hány másodpercet késik vagy siet a liftben levő ingaóra? **(15 pont)**
A matematikai inga lengésidejével számoljunk, g = 10 m/s^2

Megoldás:

a) A lift álló helyzetből indul és állandó gyorsulással halad az út feléig. A gyorsulás (5 pont):

$$H/2 = \frac{a}{2}(t/2)^2, \qquad a = \frac{H}{(t/2)^2} = \frac{578,5}{(53/2)^2} \approx 0,8238\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(b) A lift a teljes menetidő első fele alatt gyorsul, legnagyobb sebességét félúton éri el (5 pont):

$$v_{\max} = a\frac{t}{2} = 0,8238 \cdot \frac{53}{2} \approx 21,830\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(c) A gyorsuló liftben az ingára ható erő nagyobb, a lassulóban kisebb, mint az állóban. A lengésidő és az óra járása az álló, a gyorsuló és lassuló lifteben (5 pont):

A lift áll (a = 0): $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, az óra pontosan jár.

Gyorsulási szakasz: $T_{\mathrm{gy}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}} = \frac{T_0}{\sqrt{1+a/g}} < T_0$, az óra siet.

Lassulási szakasz: $T_{\mathrm{lass}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-a/g}} > T_0$, az óra késik.

Egy gyorsulási, illetve lassulási szakasz $t/2$ ideje alatt az ingaórán mutatott eltelt idő (5 pont):

$$t_{\mathrm{gy}} = \frac{t}{2}\frac{T_0}{T_{\mathrm{gy}}} = \frac{t}{2}\sqrt{1+a/g} > \frac{t}{2}, \qquad t_{\mathrm{lass}} = \frac{t}{2}\frac{T_0}{T_{\mathrm{lass}}} = \frac{t}{2}\sqrt{1-a/g} < \frac{t}{2}.$$

Egy felfelé vagy lefelé menet alatt eltelt t = 53 s és az ingaórán mutatott eltelt idő különbsége (3 pont):

$$\Delta t_1 = t - (t_{\mathrm{gy}} + t_{\mathrm{lass}}) = t - \frac{t}{2}\left(\sqrt{1+a/g} + \sqrt{1-a/g}\right),$$

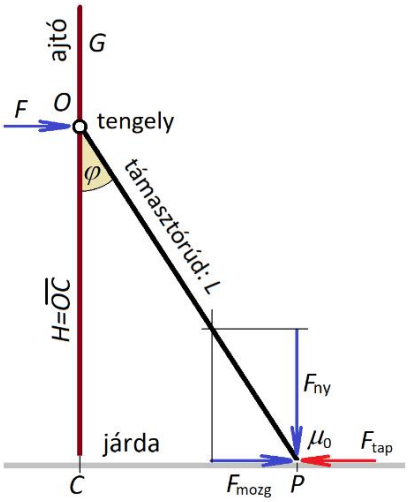
$$\Delta t_1 = 53\,\mathrm{s} - \frac{53\,\mathrm{s}}{2}\left(\sqrt{1+0,08238} + \sqrt{1-0,08238}\right) \approx 0,045054\,\mathrm{s}.$$

A napi n = 100 teljes föl/le menet alatt az eltérés ennek $2n$ = 200-szorosa (2 pont):

$$\Delta t = 2n\Delta t_1 = 2\cdot 100\cdot 0,04505\,s \approx 9,011\,s\,.$$

Az ingaóra naponta 9,01 másodpercet késik.

10. Garázsajtók kitámasztásához (becsapódásuk megakadályozására) használják a képen látható ajtókitámasztót, amelyet az ajtó aljához kell rögzíteni. A támasztórúd fölső vége az ajtóhoz rögzített, *O* ponton átmenő vízszintes tengely körül elfordulhat. (A tengely jó közelítéssel az ajtó síkjában van.) A rudat egy rugópár húzza föl, illetve nyomja le a járdához. A rúd hossza L = 250 mm, tömegét és a rugóerőket hanyagoljuk el. A kitámasztott ajtóra ható erők (pl. szélerők) merőlegesek az ajtóra, és a vízszintes F erővel nyomják a támasztórúd H magasságban levő tengelyét.



(a) A rúd alsó végén (*P*) levő gumisapka és a járda közötti tapadási tényező μ_0 =0,5. Legalább milyen magasan legyen a támasztórúd tengelye (H = ?), hogy az ajtó ne csapódjon be (a gumisapka ne csússzon meg a járdán)? **(10 pont)**
(b) Az ajtó súlya G = 400 N. Kellően nagy szélerő esetén a támasztórúd leemeli az ajtót a zsanérokról. Legalább mekkora F erőnél következne ez be? (A zsanérok súrlódását hanyagoljuk el.) **(10 pont)**

Megoldás:
(a) A rúdirányú erő legyen $F_{rúd}$. A *P* pontban ható rúderőt bontsuk fel egy vízszintes (F_{mozg}) mozgató és egy függőleges (F_{ny}) nyomóerőre (3 pont):

$$F_{mozg} = F_{rúd}\sin\varphi\,, \qquad F_{ny} = F_{rúd}\cos\varphi\,.$$

A tapadási erő (4 pont): $F_{tap} = \mu_0 F_{ny} = \mu_0 F_{rúd}\cos\varphi$.

Az ajtó nem csapódik be, ha a mozgatóerő nem nagyobb a tapadási erőnél:

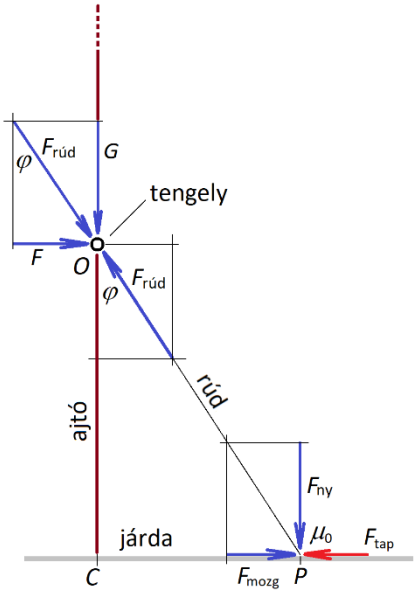
$$F_{mozg} \le F_{tap}\,, \qquad F_{rúd}\sin\varphi \le \mu_0 F_{rúd}\cos\varphi\,,$$

$$\sin\varphi \le \mu_0\cos\varphi\,,$$

$$\tan\varphi \le \mu_0 = 0,5\,, \qquad \varphi \le 26,57°\,.$$

A minimális szerelési magasság az *OPC* háromszögből (3 pont):

$$H \ge L\cos\varphi = 250\,\text{mm}\cdot\cos 26,57° \approx 223,6\,\text{mm}\,.$$



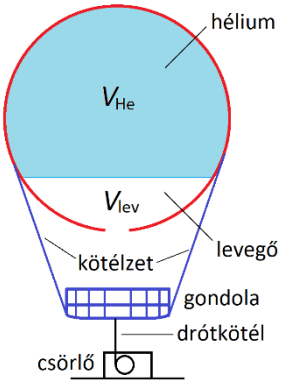
(b) Ha a rúdirányú erő függőleges összetevője egyenlő vagy nagyobb, mint az ajtó súlya, akkor az ajtó már nem a zsanérjaira nehezedik. Ilyenkor a rúderő egyenlő a szélerő és a súlyerő vektori összegével (lásd az ábrát).

Innen a keresett szélerő, amely már képes leemelni az ajtót (10 pont):

$$G \le F_{\text{rúd}} \cos\varphi\,, \qquad F = F_{\text{rúd}} \sin\varphi\,, \qquad F \ge \frac{G}{\cos\varphi}\sin\varphi = G\tan\varphi = G\mu_0 = 400\,\text{N}\cdot 0{,}5 = 200\,\text{N}\,.$$

11. 2022-ben újra indult a Városligetben a ballon-kilátó. Ez egy héliummal töltött, állandó térfogatú, alul nyitott ballon, amely drótkötéllel a földön levő csörlőhöz van kikötve.

A ballon gömb alakú, térfogata V_0 = 6000 m^3. A gondola, a kötélzet és a ballonburkolat tömege m_{gond} = 1000 kg, ezek tömör térfogata elhanyagolható a ballon térfogata mellett.
Ha a léghőmérséklet T_0 = 20°C, a légnyomás p_0 = 100 kPa, a ballon $m_{\max}$ = 4000 kg terhet (például városnézőket) képes megemelni és lebegésben tartani. A teher térfogatát is hanyagoljuk el. Tehát a megemelt legnagyobb tömör tömeg a gondolával együtt m_0 = 5000 kg.
A ballon fölső részében ρ_{He} = 0,164 kg/m^3 sűrűségű hélium van, alatta és a ballonon kívül ρ_{lev} = 1,19 kg/m^3 sűrűségű levegő.



(a) Miért helyezkedik el felül a hélium? **(2 pont)**
(b) Mekkora a hélium és a levegő térfogata a ballonban? **(8 pont)**

Egyik felemelkedés alkalmával a hasznos teher csak m_{ht} = 3000 kg volt (a megemelt összes tömör tömeg 4000 kg).
(c) Ha induláskor elszakadna a drótkötél, mekkora kezdő gyorsulással emelkedne a ballon? g = 10 m/s^2. **(10 pont)**

Megoldás:
(a) A levegő sűrűsége 7,3-szer nagyobb, mint a héliumé, ezért „úszik” a kisebb sűrűségű hélium a nagyobb sűrűségű levegőn. (2 pont)

(b) Az m_0 = 5000 kg összes teherrel a ballon lebeg, tehát a rá ható Archimédesz-féle felhajtóerő (a kiszorított levegő súlya) megegyezik az összes teher, valamint a ballonban levő hélium és levegő súlyának összegével (8 pont):

$$V_0\rho_{\text{lev}}g = m_0 g + V_{\text{He}}\rho_{\text{He}}g + \left(V_0 - V_{\text{He}}\right)\rho_{\text{lev}}g\,, \qquad 0 = m_0 + V_{\text{He}}\left(\rho_{\text{He}} - \rho_{\text{lev}}\right).$$

Innen a keresett térfogatok:

$$V_{\text{He}} = \frac{m_0}{\rho_{\text{lev}} - \rho_{\text{He}}} = \frac{5000\,\text{kg}}{(1{,}19 - 0{,}164)\,\text{kg/m}^3} \approx 4873\,\text{m}^3,$$

$$V_{\text{lev}} = V_0 - V_{\text{He}} = (6000 - 4873)\,\text{m}^3 = 1127\,\text{m}^3.$$

(c) A ballonra ható felhajtóerő egyenlő az 5000 kg lebegésben tartott tömeg súlyerejével. A gyorsítóerő a felhajtóerő mínusz a gondola és a hasznos teher tömegére ható súlyerő (4 pont):

$$F = m_0 g - \left(m_{\text{gond}} + m_{\text{ht}}\right)g = (5000 - 1000 - 3000)\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 = 10000\,\text{N}\,.$$

A gyorsított tömeg a ballonban levő levegő és hélium tömege plusz a gondola és a hasznos teher tömege (4 pont):

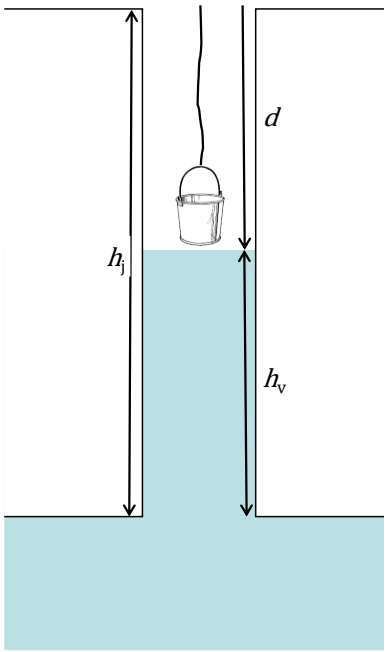
$$m_{\text{lev}} = \rho_{\text{lev}} V_{\text{lev}} = 1{,}19 \cdot 1127 \approx 1341\,\text{kg}\,, \qquad m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} V_{\text{He}} = 0{,}164\,\text{kg/m}^3 \cdot 4873\,\text{m}^3 \approx 799\,\text{kg}\,,$$

$$m = m_{\text{lev}} + m_{\text{He}} + m_{\text{gond}} + m_{\text{ht}} = (1341 + 799 + 1000 + 3000)\,\text{kg} = 6140\,\text{kg}\,.$$

A kezdő gyorsulás a mozgásegyenlet alapján (2 pont):

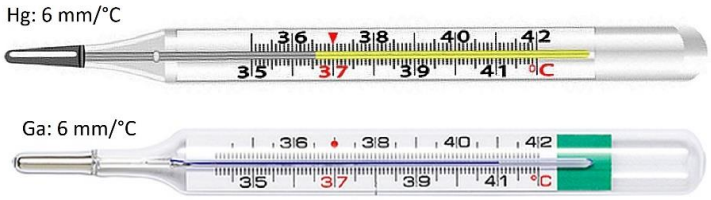
$$a_0 = \frac{F}{m} = \frac{10000\,\text{N}}{6140\,\text{kg}} \approx 1{,}63\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

12. Egy nagy tavon a parttól távol léket vágnak a jégbe. Milyen mélyre kell leengedni a lékbe egy vödröt, hogy vizet tudjuk fölhúzni vele? A jég 10 m vastag (pl. az Erie-tó jege 2010-2011 telén elérte ezt a vastagságot). **(10 pont)**



Megoldás:
Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: A jég $h_{\text{jég}} = 10$ m vastag. A víz és a jég sűrűsége rendre $\rho_{\text{víz}} = 1000\ \text{kg/m}^3$ és $\rho_{\text{jég}} = 920\ \text{kg/m}^3$ *(1 pont)*. A kérdezett mélységet jelölje d! A tó jege a parthoz közeli részektől eltekintve a vízen úszik *(2 pont)*. Az úszó testek alsó felületének magasságában a test anyagából származó rétegnyomás megegyezik a folyadék rétegnyomásával *(3 pont)*: $h_{\text{jég}} \cdot \rho_{\text{jég}} \cdot g = h_{\text{víz}} \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g$ *(2 pont)*. A vízszint mélysége a lékben $d = h_{\text{jég}} - h_{\text{víz}} = = h_{\text{jég}} - h_{\text{jég}} \frac{\rho_{\text{jég}}}{\rho_{\text{víz}}} = h_{\text{jég}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{jég}}}{\rho_{\text{víz}}}\right) =$ $10\ \text{m} \left(1 - \frac{920\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right) = \underline{0{,}8\ \text{m}}$ *(2 pont)*.

13. A folyadékos lázmérők hőre táguló folyadékkal töltött zárt üvegtartályból és az ehhez csatlakozó kapilláriscsőből állnak. A mért hőmérsékletet a kapilláriscső (szűk keresztmetszetű üvegcső) mögött elhelyezett skáláról lehet leolvasni.
A 2009 előtt forgalomba hozott lázmérők higannyal (Hg) voltak töltve, azóta egy kevésbé mérgező gallium–indium–ón ötvözet (galinstan) a töltőfolyadék.



Egy higanyos és egy galliumos lázmérő skálaosztása megegyezik: s = 6 mm/°C, azaz 1°C hőmérsékletváltozásra 6 mm-rel mozdul el a kapillárisban a folyadékoszlop vége. (Az ábrán a higanyos lázmérő 36,5°C-ot, a galliumos 41°C-ot mutat.)

A lázmérők üveganyagának vonalas hőtágulási együtthatója $\alpha_{\text{üveg}} = 17,6 \cdot 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$, a higany, illetve a galliumötvözet térfogati hőtágulási együtthatója $\beta_{\text{Hg}} = 181 \cdot 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$, $\beta_{\text{Ga}} = 126 \cdot 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$.

(a) A higanyos lázmérőben V_{Hg0} = 45 mm^3 higany van (35°C-on). A kapilláriscső térfogatát hanyagoljuk el a tartály térfogata mellett. Mekkora a kapilláriscső átmérője? **(10 pont)**
(b) A galliumos lázmérő kapilláriscsövének átmérője megegyezik a higanyoséval. Mekkora térfogatú galliumötvözet van a galliumos lázmérőben? **(5 pont)**

Megoldás:
(a) Legyen a kapilláriscső keresztmetszete A. ΔT hőmérsékletváltozás hatására a tartályban levő higany térfogatnövekedése mínusz az üveg térfogatnövekedése egyenlő a kapilláriscsőbe benyomuló folyadék térfogatával (4 pont):

$$V_{\text{Hg0}}\beta_{\text{Hg}}\Delta T - V_{\text{Hg0}}3\alpha_{\text{üveg}}\Delta T = As\Delta T\,,$$

Innen a keresztmetszet és abból a kapilláriscső átmérője (3+3 pont):

$$A = V_0\frac{\beta_{\text{Hg}} - 3\alpha_{\text{üveg}}}{s} = 45\frac{181 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 17,6 \cdot 10^{-6}}{6} \approx 9,615 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}^2\,,$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9,615 \cdot 10^{-4}}{\pi}} \approx 0,0350\,\text{mm}\,.$$

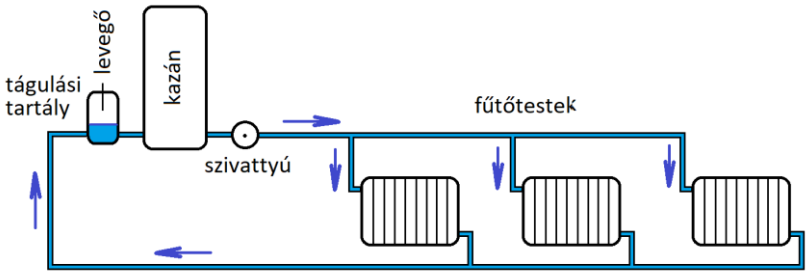
(b) A térfogatváltozásra fölirt előző egyenletet írjuk föl a galliumos lázmérőre (3 pont):

$$V_{\text{Ga0}}\beta_{\text{Ga}}\Delta T - V_{\text{Ga0}}3\alpha_{\text{üveg}}\Delta T = As\Delta T\,, \qquad V_{\text{Ga0}}\left(\beta_{\text{Ga}} - 3\alpha_{\text{üveg}}\right) = As\,.$$

Innen a gallium térfogata (2 pont):

$$V_{\text{Ga0}} = \frac{As}{\beta_{\text{Ga}} - 3\alpha_{\text{üveg}}} = \frac{9,615 \cdot 10^{-4} \cdot 6}{126 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 17,6 \cdot 10^{-6}} \approx 78,8\,\text{mm}^3\,.$$

14. Egy családi házat úgynevezett cirkóval fűtenek. Ennek lényege a következő. Egy kazánban elégetjük a földgázt. Ennek égéshője vizet melegít, amit egy szivattyú csöveken keresztül juttat el a helyiségekben levő fűtőtestekbe (az ábrán hármat tüntettünk fel). Miközben a fűtőtestek melegítik a helyiségeket, a bennük átfolyó víz kissé lehűl és visszaáramlik a kazánba.



A rendszerbe be van iktatva egy tágulási tartály is az ábra szerint. Ennek fölső részében levegő van. Egy szivattyú keringteti (cirkuláltatja) a vizet a kazán, a csövek, a tágulási tartály és a fűtőtestek által kialakított zárt térben.
Beüzemeléskor a rendszert T_0 = 20°C-on feltöltik vízzel úgy, hogy a tágulási tartály fölső részében $V_{0.\text{lev}}$ = 8 liter térfogatú, p_0 = 2 bar nyomású (teljes nyomás) levegő maradjon. A zárt tér teljes térfogata V_0 = 100 liter, így a betöltött víz térfogata $V_{0.\text{víz}}$ = 92 liter.

A kazán, a csövek, a tágulási tartály és a fűtőtestek acélból készültek. Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha_{\text{acél}} = 11 \cdot 10^{-6} / °\text{C}$. A víz térfogati hőtágulási együtthatója $\beta_{\text{víz}} = 430 \cdot 10^{-6} / °\text{C}$.
A rendszer egyes elemeinek szintkülönbségét hanyagoljuk el. A vizet tekintsük összenyomhatatlannak. A zárt tér térfogata a rendszerben kialakuló nyomás hatására nem változik.

(a) Ha a fűtés során az egész rendszer hőmérséklete jó közelítéssel T_1 = 60°C, mekkora nyomás alakul ki benne? **(12 pont)**
(b) Mi történne a fűtés során, ha nem lenne tágulási tartály a rendszerben? **(3 pont)**

Megoldás:
(a) A hőmérséklet változása a fűtés bekapcsolása során ΔT = 40°C.
A víz és a zárt tér térfogata fűtéskor (6 pont):

$$V_{1.\text{víz}} = V_{0.\text{víz}}\left(1+\beta_{\text{víz}}\Delta T\right) = 92\,\text{liter}\cdot\left(1+430\cdot10^{-6}/°\text{C}\cdot40°\text{C}\right) \approx 93{,}582\,\text{liter},$$

$$V_1 = V_0\left(1+3\alpha_{\text{acél}}\Delta T\right) = 100\,\text{liter}\cdot\left(1+3\cdot11\cdot10^{-6}/°\text{C}\cdot40°\text{C}\right) \approx 100{,}132\,\text{liter}.$$

A tágulási tartályba zárt levegő térfogata fűtéskor (2 pont):

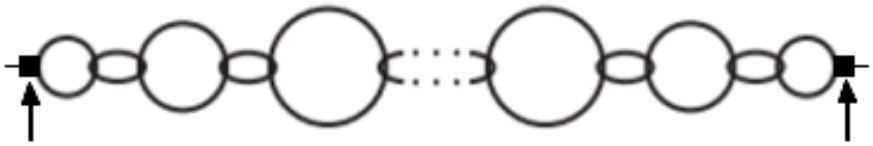
$$V_{1.\text{lev}} = V_1 - V_{1.\text{víz}} = 100{,}132 - 93{,}582 = 6{,}55\,\text{liter}.$$

Az egyesített gáztörvény a tágulási tartályba zárt levegőre, és ebből a rendszerben uralkodó nyomás fűtéskor (4 pont):

$$\frac{p_0V_{0.\text{lev}}}{T_0} = \frac{p_1V_{1.\text{lev}}}{T_1}, \qquad p_1 = p_0\cdot\frac{V_{0.\text{lev}}}{V_{1.\text{lev}}}\cdot\frac{T_1}{T_0} = 2\,\text{bar}\cdot\frac{8}{6{,}55}\cdot\frac{60+273}{20+273} \approx 2{,}776\,\text{bar}.$$

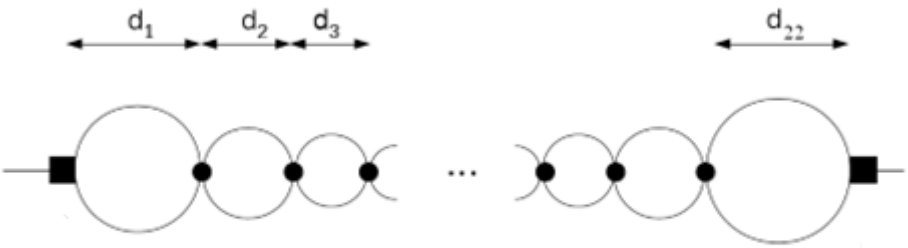
(b) Mivel a víz hőtágulása 13-szor nagyobb, mint az acélé, fűtéskor nagyon nagy (a feltételek teljesülése esetén végtelen nagy) nyomás alakulna ki a rendszerben. Ez csőtörést és a víz elfolyását okozná. (3 pont)

15. Egy 6 g tömegű ezüstlánc 22 db különböző átmérőjű ezüst gyűrűből áll, de az egyes gyűrűkben az ezüsthuzal keresztmetszete azonos és jóval kisebb, mint a gyűrű mérete. A megfeszített lánc hossza 48 cm, elektromos ellenállása 0,045 Ω. Az ezüst gyűrűk, mint vezetékek által képviselt ellenálláson kívül a gyűrűk érintkezési pontjainál is ellenállás lép fel. Mekkora az egyes érintkezési pontokban fellépő elektromos ellenállás átlagos értéke?
(20 pont)

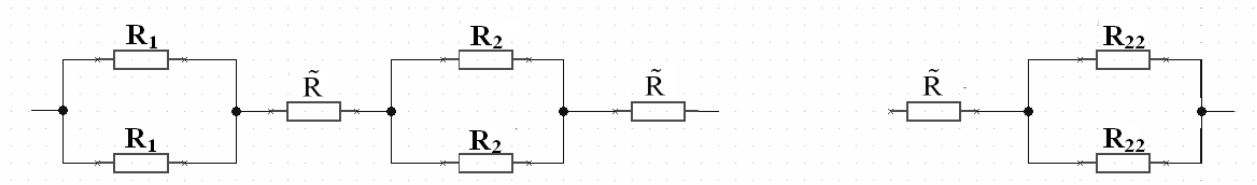


(A két csatlakozást, amelyeken a megfeszített teljes lánc eredő ellenállását mérjük, tételezzük fel ideálisnak.) Az ezüst sűrűsége 10500 kg/m^3, a fajlagos ellenállása 1,629·10^{-8} Ωm.

Megoldás:
Adatok:
m = 6 g = 6·10^{-3} kg, L = 48 cm = 4,8·10^{-1} m, R_e = 0,045 Ω = 4,5·10^{-2} Ω, ρ = 1,05·10^4 kg/m^3, $\tilde{\rho} = 1{,}629\cdot10^{-8}$ Ωm



A 22 láncszem elektromos ellenállás szempontjából 22-szer 2 párhuzamosan kapcsolt ellenállásnak tekintendők *(4 pont)*, ahol a párhuzamosan kapcsolt ellenállások a félkörívek hosszával arányosak *(2 pont)*, a láncszemek ellenállása és az érintkezési pontok (21 darab) átlagos $\tilde{R}$ ellenállásai sorba vannak kapcsolva *(1 pont)*.
Tehát a helyettesítő kapcsolás *(1 pont)*:



A láncszemek ezüsthuzalának A keresztmetszete a lánc tömegéből meghatározható:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \left(L_{huzal} \cdot A\right) = \rho \cdot \left(\sum_{i=1}^{22} \pi \cdot d_i\right) \cdot A = \rho \cdot \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^{22} d_i\right) \cdot A = \rho \cdot \pi \cdot L \cdot A \quad ,$$

amiből:

$$A = \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot L} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}05 \cdot 10^{4} \cdot \pi \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-1}} = 3{,}79 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2 .$$ *(4 pont)*

Az i-edik láncszem egy félkörívének ellenállása:

$$R_i = \tilde{\rho}\frac{l_i}{A} = \tilde{\rho}\frac{d_i \pi}{2A} .$$ *(2 pont)*

Az i-edik láncszem két félkörívéhez tartozó R_i ellenállások párhuzamosan vannak kötve, így az i-edik láncszem eredő ellenállása $R_i/2$, így a lánc teljes eredő ellenállása:

$$R_e = \sum_{i=1}^{22} \frac{R_i}{2} + 21 \cdot \tilde{R} = \sum_{i=1}^{22} \frac{1}{2}\tilde{\rho}\frac{d_i \pi}{2A} + 21 \cdot \tilde{R} = \frac{\tilde{\rho}\pi}{4A}\sum_{i=1}^{22} d_i + 21 \cdot \tilde{R} = \frac{\tilde{\rho}\pi}{4A} L + 21 \cdot \tilde{R} .$$ *(4 pont)*

Ebből a keresett átlagos $\tilde{R}$ ellenállás értéke:

$$\tilde{R} = \frac{1}{21}\left(R_e - \frac{\tilde{\rho}\pi}{4A} L\right) = \frac{1}{21}\left(4{,}5 \cdot 10^{-2} - \frac{\pi \cdot 1{,}629 \cdot 10^{-8} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 3{,}79 \cdot 10^{-7}}\right) = 1{,}37 \cdot 10^{-3}\ \Omega .$$ *(2 pont)*

16. A mobiltelefonokban lítium-polimer akkumulátort használnak (katód: lítium-kobalt-oxid, anód: grafit, elektrolit: lítium-hexafluorfoszfát).
Egy ilyen akkumulátor adatai:

- kapacitás (töltéstároló képesség): 5000 mA h
- névleges feszültség 3,6 V
- belső ellenállás 30 mΩ
- tömeg 80 gramm
- hőkapacitás 150 J/°C
- lítium olvadáspontja 180°C

(a) Mennyi energiát tárol a feltöltött akkumulátor? Az eredményt adja meg W h és kJ egységben is. **(5 pont)**
(b) A feltöltött akkumulátorban belső zárlat keletkezik. Mekkora a rövidzárlati áram és teljesítmény? **(5 pont)**
(c) Mennyi hőenergia szükséges ahhoz, hogy az akkumulátor 30°C-ról 180°C-ra (ez a lítium olvadáspontja) melegedjen? Ez az energia hány százaléka az akkumulátorban tárolt energiának? **(5 pont)**
(d) A rövidzárlati teljesítménnyel számolva, mennyi idő telik el ezalatt? A melegedés közben az akkumulátor és környezete közt kialakuló hőcserét hanyagoljuk el. **(5 pont)**

Megoldás:
(a) A tárolt energia (5 pont):

$$W = UQ = 3{,}6\,\mathrm{V}\cdot 5\,\mathrm{A\,h} = 18\,\mathrm{W\,h} = 18\,\mathrm{W\,h}\cdot 3600\,\mathrm{s/h} = 64{,}8\,\mathrm{kJ}\,.$$

(b) A rövidzárlati áram és teljesítmény (3+2 pont):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{3{,}6\,\mathrm{V}}{0{,}03\,\Omega} = 120\,\mathrm{A}\,, \qquad P = UI = 3{,}6\,\mathrm{V}\cdot 120\,\mathrm{A} = 432\,\mathrm{W}\,.$$

(c) A fölmelegedéshez szükséges hő (3+2 pont):

$$q = C\Delta T = 150\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}}\cdot(180-30)\,°\mathrm{C} = 22{,}5\,\mathrm{kJ}\,, \qquad \frac{q}{W} = \frac{22{,}5\,\mathrm{kJ}}{64{,}8\,\mathrm{kJ}} \approx 34{,}7\%\,.$$

(d) A felmelegedéshez szükséges idő (5 pont):

$$t = \frac{q}{P} = \frac{22500\,\mathrm{J}}{432\,\mathrm{W}} \approx 52{,}1\,\mathrm{s}\,.$$